30/4/2018

Φυλλ. 4 ασκ. 1.

1) $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\phi(k) = k - 1$ Είναι αυτή η απεικόνιση ομομορφισμός ομάδων; ΟΧΙ γιατί αν ϕ ομομορφισμός $\phi(0) = 0$, αλλά $\phi(0) = -1$.

2) $\phi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $\phi(a) = |a|$

ΝΑΙ, γιατί $\phi(ab) = |ab| = |a| \cdot |b|$

3) $\phi : S_3 \to S_3$ $\phi(a) = a^{-1}$ ΟΧΙ, δες φυλ. 4 ασκ. 2 γιατί S_3 όχι αβελιανή.

4) $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$, $\phi([a]_6) = [a]_2$

Είναι η ϕ καλά ορισμένη; Δηλ. αν $a, a' \in \mathbb{Z}$ με $[a]_6 = [a']_6$ ισχύει $[a]_2 = [a']_2$;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u> Έστω $[a]_6 = [a']_6 \Rightarrow \begin{cases} 6 \mid a - a' \\ 2 \mid 6 \end{cases} \Rightarrow$

$2 \mid a - a' \Rightarrow [a]_2 = [a']_2$

Άρα ϕ καλά ορισμένη. $\phi([a_1]_6 + [a_2]_6) =$
$\phi([a_1+a_2]_6) = [a_1+a_2]_2 = [a_1]_2 + [a_2]_2 = \phi([a_1]_6) +$
$\phi([a_2]_6)$ Άρα ϕ ομομορφισμός ομάδων.

(ΠΡΟΣΟΧΗ Δεν είναι καλά ορισμένη $\phi: \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_2$,
$\phi([a]_7) = [a]_2$, γιατί $[7]_7 = [14]_7$ αλλά $[7]_2 \neq [14]_2$)

ΦΥΛ. 4 ΑΣΚ. 2

1) $\Rightarrow$ 2) Έστω $a, b \in G$ $f(a*b) = (a*b)^{-1} \overset{G \text{ αβελιανή}}{=} b^{-1} * a^{-1} =$
$a^{-1} * b^{-1} = f(a) * f(b)$. Συνεπώς f ομομορφισμός.
2) $\Rightarrow$ 1) Έστω $a, b \in G$ Θέτουμε $a' = a^{-1}$, $b' = b^{-1}$
Αφού f ομομορφισμός (από υπόθεση) $f(a'*b') = f(a') * f(b')$
$\Rightarrow$ $(a'*b')^{-1} = (a')^{-1} * (b')^{-1} \Rightarrow$
$(b')^{-1} * (a')^{-1} = (a')^{-1} * (b')^{-1} \Rightarrow$
$b*a = a*b$ άρα G αβελιανή
Σε κάθε ομάδα G $(a^{-1})^{-1} = a$
1) $\Rightarrow$ 3) Υποθ. G αβελιανή. Έστω $a, b \in G$
$h(a*b) = (a*b)^2 = a*b*a*b \underset{G \text{ αβελιανή}}{=} a*a*b*b =$

$a^2 * b^2 = h(a) * h(b)$
3) $\Rightarrow$ 1) Έστω $a, b \in G$. Θα δείξουμε ότι $a*b = b*a$
Αφού h ομομορφισμός, $h(a*b) = h(a) * h(b) \Rightarrow$
$(a*b)^2 = a^2 * b^2 \Rightarrow a*b*a*b = a*a*b*b \underset{\text{ΚΑΝΟΝΑΣ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ}}{\Longrightarrow}$

$b*a = a*b$ Άρα G αβελιανή.

(ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Αν G ομάδα $a, c_1, c_2 \in G$. Τότε
$a*c_1 = a*c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$ και
$c_1*a = c_2*a \Rightarrow c_1 = c_2$)

ΚΑΝΟΝΑΣ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ

ΦΥΛ. 4 ασκ. 1 2) $\phi: (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $\phi(a) = |a|$
Ποιος είναι ο πυρήνας της ϕ;
Υπενθύμιση. Ο πυρήνας της ϕ $\ker\phi$ είναι τα στοιχεία της πρώτης ομάδος που μέσω της ϕ πάνε στο ταυτοτικό της $2^{ης}$ ομάδας.

Άρα, $a \in Ker\phi \iff \phi(a)=1 \iff |a|=1 \iff$
$a=1$ ή $a=-1$ Συνεπώς $Ker\phi = \{1,-1\}$

4) $\mathbb{Z}_6 = \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$
$\mathbb{Z}_2 = \{[0]_2, [1]_2\}$

$Ker\phi = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ $(S_n, \circ)$

Έστω $n \geq 1$ $A = \{1, 2, \dots, n\}$ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ
$S_n = \{f : A \to A \mid f$ 1-1 και ΕΠΙ$\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αφού A πεπερασμένο σύνολο έχουμε ότι ισχύουν $S_n = \{f : A \to A \mid f \text{ 1-1}\} = \{f : A \to A \mid f \text{ ΕΠΙ}\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ Για $n \geq 3$ S_n όχι αβελιανή

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \end{pmatrix}$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix}$

Ενώ $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix}$ Άρα $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ $|S_n| = n!$ Επίσης $S_1 = \{e\}$
S_2 αβελιανή με 2 στοιχεία
Έστω $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma \in S_n$
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Η σ επάγει διαμέριση του A στις τροχιές της σ. Δηλ. μια σχέση ισοδυναμίας στο A.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in S_9$

$A = \{1, 2, \dots, 9\}$

Μελέτη τροχιών

$1 \mapsto 2 \mapsto 1$

$3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 3$

$6 \mapsto 7 \mapsto 6$

$8 \mapsto 9 \mapsto 8$

Λέμε ότι το $A =$ ξένη ένωση των τροχιών $=$

τροχιά(1) $\cup$ τροχιά(3) $\cup$ τροχιά(6) $\cup$ τροχιά$_\sigma$(8)

όπου τροχιά$_\sigma(1) = \{1, 2\}$

τροχιά$_\sigma(3) = \{3, 4, 5\}$

τροχιά$_\sigma(6) = \{6, 7\}$

τροχιά$_\sigma(8) = \{8, 9\}$

Με άλλα λόγια το A είναι ξένη ένωση 4 υποσυνόλων του καθένα από τα οποία είναι τροχιά της σ.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\sigma \in S_n$ και $a, b \in A$. Λέμε a, b στην ίδια τροχιά της σ και γράφουμε $a \sim_\sigma b$ αν υπάρχει ακέραιος κ με $b = \sigma^{\kappa}(a)$ (όπου σ^{κ} είναι η δύναμη του σ στην S_n)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Στο παράδειγμα $6 \sim_\sigma 7$ ενώ τα 1 και 5 ΔΕΝ είναι στην ίδια τροχιά της σ. Επίσης $3 \sim_\sigma 5$ γιατί $\sigma \circ \sigma(3) = 5$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Η $\sim_\sigma$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο A.

Απόδειξη

a) Έστω $a \in A$. Αφού $\sigma^0 = id$ έχουμε $a = \sigma^0(a)$. Άρα $a \sim_\sigma a$

b) Έστω $a, b \in A$ έχουμε $a \sim_\sigma b$. Άρα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ με $b = \sigma^{\kappa}(a)$. Συνεπώς $\sigma^{-\kappa}(b) = (\sigma^{-\kappa})(\sigma^{\kappa}(a)) = a$

Άρα $b \sim_\sigma a$.

c) Υποθέτουμε $a, b, c \in A$ με $a \sim_\sigma b$ και $b \sim_\sigma c$

Άρα υπάρχει $\kappa_1 \in \mathbb{Z}$ με $b = \sigma^{\kappa_1}(a)$ και $\kappa_2 \in \mathbb{Z}$ με $c = \sigma^{\kappa_2}(b)$. Άρα $c = \sigma^{\kappa_2}(b) = \sigma^{\kappa_2}(\sigma^{\kappa_1}(a)) = (\sigma^{\kappa_2} \circ \sigma^{\kappa_1})(a)$

$\sigma^{k_1+k_2}(a)$ Συνεπώς $a \sim_\sigma c$
Ορίζουμε για $a \in A$ $\text{τροχιά}_\sigma(a) = \{b \in A : b \sim_\sigma a\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα στοιχείο $\sigma \in S_n$ λέγεται ΚΥΚΛΟΣ αν διαθέτει το ΠΟΛΥ μια τροχιά με περισσότερα από ένα στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Το σ του παραδείγματος δεν είναι κύκλος γιατί έχει 4 τροχιές με τουλάχιστον δύο στοιχεία, ενώ αν ήταν κύκλος θα έπρεπε να έχουν 0 ή 1 τέτοιες τροχιές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_9$$

$\text{τροχιά}_\sigma(1) = \{1\}$
$\text{τροχιά}_\sigma(2) = \{2, 9, 4, 5, 7\}$
$\text{τροχιά}_\sigma(3) = \{3\}$
$\text{τροχιά}_\sigma(6) = \{6\}$
$\text{τροχιά}_\sigma(8) = \{8\}$

Συνεπώς σ κύκλος.

Έστω $\sigma = id_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Το σ είναι κύκλος γιατί ο αριθμός των σ-τροχιών με τουλάχιστον δύο στοιχεία είναι ΜΗΔΕΝ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Στο σύνολο $A = \{1, \dots, n\}$ ορίσαμε σχέση ισοδυναμίας $\sim_\sigma$. Ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας; ΑΠΑΝΤΗΣΗ Οι σ τροχιές.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ. Έστω $n \geq 2$, $r \leq n$ $A = \{1, \dots, n\}$ και $b_1, b_2, \dots, b_r \in A$ διαφορετικά ανά δύο.
Τότε $(b_1, \dots, b_r) \in S_n$ συμβολίζει το στοιχείο $\sigma \in S_n$.
με $\sigma(b_i) = b_{i+1}$ αν $i < r$
$\sigma(b_r) = b_1$

$\sigma(a) = a$ αν $a \notin \{b_1, \ldots, b_r\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $n=9$, $r=3$. Τότε το $(5,7,9) \in S_9$ είναι το στοιχείο $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 9 & & 5 \end{pmatrix}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το σ στο παράδειγμα κάποιες φορές συμβολίζεται και $(5,7,9)(1)(2)(3)(4)(6)(8)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $(b_1, b_2, \ldots, b_r) \in S_n$ κύκλος. Το r λέγεται ΜΗΚΟΣ του κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΗ Η τάξη του $(b_1, \ldots, b_r)$ στην S_n είναι r.

(ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ο κύκλος $(5,7,9) \in S_9$ έχει τάξη 3 στην S_9 γιατί έχει 3 στοιχεία.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε $\sigma = (b_1, \ldots, b_r) \in S_n$. Αφού S_n πεπερασμένη ομάδα έχουμε $ord\sigma < \infty$. Άρα $ord\sigma = \min\{k \in \mathbb{Z}, k>0$ και $\sigma^k = e = id_A\}$

Αν $k < r$ $\sigma(b_1) = b_{1+k} \neq b_1$, άρα $\sigma^k \neq id_A$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ $\sigma^r = id_A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν $a \notin \{b_1, \ldots, b_r\}$ $\sigma(a) = a \Rightarrow \sigma^r(a) = a$. Αν $a \in \{b_1, \ldots, b_r\}$ εύκολα βλέπουμε $\sigma^r(a) = a$. Άρα $ord(\sigma) = r$

$a = b_i \mapsto b_{i+1} \mapsto \ldots \mapsto b_r \mapsto b_1 \mapsto \ldots \to b_i$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $\sigma_1 = (b_1, \ldots, b_{r_1}) \in S_n$ $\sigma_2 = (c_1, \ldots, c_{r_2}) \in S_n$ δύο κύκλοι. Οι κύκλοι λέγονται ξένοι μεταξύ τους αν $b_i \neq c_j$ για όλα τα i, j

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $\sigma_1 = (1,3,5) \in S_8$, $\sigma_2 = (2,4,5,7) \in S_8$. Οι σ_1, σ_2 ΔΕΝ είναι ξένοι μεταξύ τους γιατί το 5 εμφανίζεται και στους δύο. Ενώ οι κύκλοι $(1,3,5)$ και $(2,4,8)$ της S_8 είναι ξένοι μεταξύ τους

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\sigma \in S_n$. Τότε το σ γράφεται ως σύνθεση κύκλων των ξένων ανά δύο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $\sigma \in S_n$. Θεωρούμε τις τροχιές του σ. $t_1 = \{1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{p-1}(1)\}, t_2, \ldots, t_r$

Ορίζουμε για $i = 1, 2, \ldots, r$ τον κύκλο $\mu_i \in S_n$ ως εξής: Για $x \in A = \{1, \ldots, n\}$ $\mu_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{αν } x \in t_i \\ x & \text{αν } x \notin t_i \end{cases}$

Τότε εύκολα βλέπουμε ότι $\sigma = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ldots \circ \mu_r$ και από την κατασκευή κάθε μ_i είναι κύκλος και για $i \neq j$ οι κύκλοι μ_i, μ_j είναι ξένη ανά δύο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$

Θέτουμε $\mu_1 = (1,2), \mu_2 = (3,4,5), \mu_3 = (6,7), \mu_4 = (8,9)$

Τότε $\mu_1, \ldots, \mu_4$ κύκλοι της S_9 ανά δύο ξένοι μεταξύ τους και $\sigma = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \mu_3 \circ \mu_4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $A = \{1,2,3\}$ Γράφουμε τα στοιχεία της S_3 σαν γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)\cdot(2)(3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2)$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2)$$

$\sigma_5 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = (1,2,3)$

σ_4 $\quad \sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix} = (1,3,4,2)$ και άρα $ord(\sigma) = 4$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = (1,4,3)$ άρα $ord(\sigma_1) = 3$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix} = (1,3)$ $\quad ord(\sigma_2) = 2$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} = (1,3)(2,4)$

Θα δούμε το εξής. Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \in S_n$ κύκλοι ξένοι ανά δύο με το μ_i να είναι d_i-κύκλος. Θέτουμε $\sigma = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \dots \circ \mu_r$. Τότε $ord(\sigma) =$ Ε.Κ.Π.$(d_1, d_2, d_3, \dots, d_r)$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $ord((1,3)(2,4)) =$ Ε.Κ.Π.$(2,2) = 2$

$ord((1,3,5),(2,8)) =$ Ε.Κ.Π.$(3,2) = 6$